Geometria Lipschitz das singularidades

Lev Birbrair
Edvalter Sena

impa

33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Geometria Lipschitz das singularidades

Geometria Lipschitz das singularidades
Primeira impressão, julho de 2021

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-65-89124-56-6
MSC (2020) Primary: 14P10, Secondary: 11F06

Coordenação Geral Carolina Araujo

Produção Books in Bytes **Capa** Izabella Freitas & Jack Salvador

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ

www.impa.br
editora@impa.br

Dedicado à memória da Marina Sobolevsky, professora de UECE e colaboradora de Lev Birbrair no ”Realização de Complexos de Hölder.” A vida e o trabalho de Marina foram fundamentais para construir a Teoria Métrica de Singularidades.

Sumário

1 Curvas **4**
1.1 Semicomplexo de Hölder 4
1.2 Curvas semialgébricas e semicomplexos de Hölder 5
1.3 Semicomplexo de Hölder como invariante bi-Lipschitz 8
1.4 O Teorema da Realização 11

2 Superfícies **12**
2.1 Aplicação bi-Lipschitz 12
2.2 Complexo de Hölder 13
2.3 Triângulo de Hölder 15
2.4 Cones e Cornetas 20
2.5 Existência do Complexo de Hölder 22
2.6 Simplificação de Complexos de Hölder 25
2.7 Complexo de Hölder Canônico – Teorema de Classificação 28
2.8 Semicomplexo de Hölder e Complexo de Hölder 30
2.9 Teorema de Realização 33

3 Mergulho Normal **34**
3.1 Mergulho normal de subconjuntos semialgébricos 34
3.2 Métrica da panqueca 37
3.3 Tenda e procedimento de tenda 39

4 Metric Knots **43**
4.1 Equivalência ambiental 43
4.2 Nós Métricos 47

Bibliografia **55**

Índice Remissivo **60**

Introdução

A Geometria Lipschitz das singularidades é uma teoria relativamente nova, em comparação com outras partes da teoria das singularidades. O primeiro resultado nesta direção foi obtido por Frédéric Pham e Bernard Teissier em 1969. Eles investigaram a estrutura de germe de uma curva plana complexa no ponto de visto métrico. O descobrimento deles pode ser formulado na seguinte forma:

Teorema *Dois germes das curvas planas X e Y são equivalentes bi-Lipschitz respeito a métrica outer se e somente se eles são ambientalmente topologicamente equivalentes.*

Este resultado, sendo isolado na época, não era tão impressionante como mereceria. Na época era difícil de descobrir, que o resultado é bem frutífero por que os espertos não sabiam, que existe uma diferença muito grande entre Geometria Lipschitz e Topologia. Por outro lado, as demonstrações dos resultados eram mais algébricas e bastante complicadas. Neste ponto começaremos. De fato, trabalharemos com conjuntos semialgébricos, subanaliticos (ou conjuntos definíveis nas estruturas o-minimais) com singularidades. Vamos dedicar-se para estudas locais, i.e., estudos dos germes destes conjuntos em pontos singulares.

Na visão moderna da Geometria Lipschitz das singularidades temos 3 direções: 1) Geometria Lipschitz intrínseca; 2) Geometria Lipschitz outer ou extrínseca; 3) Geometria Lipschitz ambiental. Toda geometria está baseada na relação de equivalência correspondente. Métrica intrínseca ou métrica do comprimento está definida como o comprimento mínimo do arco semialgébrico, ligando dois pontos.

Equivalência Lipschitz intrínseca de par dos conjuntos X e Y é existência de uma aplicação bi-Lipschitz, com respeito a métrica intrínseca entre eles. Equivalência extrínseca está definida como existência de uma aplicação bi-Lipschitz, com respeito a métrica outer – a métrica de espaço ambiente. E finalmente equivalência ambiental é existência da uma aplicação bi-Lipschitz outer, que pode ser estendida para aplicação bi-Lipschitz, definida no espaço ambiente.

O livro recente de Walter Neumann e Anne Pichon (ver Neumann e Pichon 2020) esta cobrando vários aspectos de geometria Lipschitz das singularidades. Maior parte do livro esta dedicado a teoria complexa. Nosso curso tem esta mais dedicado a parte do Geometria Real.

Neste trabalho, queremos explicar para os leitores, alguns resultados que achamos importantes sobre todos as três Geometrias Lipschitz de dimensão baixa – geometria das curvas e superfícies. De fato, a equivalência ambiental implica equivalência outer e equivalência outer implica equivalência intrínseca.

No Capítulo 1 estamos descrevendo a Geometria Lipschitz outer das curvas semialgébricas. O caso das curvas é "trivial" no sentido da Geometria intrínseca. Mas no ponto de vista de métrica outer este caso é primeiro caso interessante. Os resultados do Capítulo 1 são baseados no trabalho conjunto de Birbrair e A. C. Fernandes (2000). Definimos ordem de contato ou ordem de tangencia de par dos arcos. O resultado principal deste capitulo é seguinte: O tabelo das ordens do contato (semicomplexo) dos ramos das curvas é um invariante completo.

No Capítulo 2 consideramos o caso das superfícies no ponto de vista de Geometria intrínseca. Aqui definimos o objeto principal complexo de Hölder. O teorema principal deste capítulo é o teorema de existência do complexo de Hölder. Provamos que a superfície pode ser localmente triangulada no tal jeito, que todo triângulo é equivalente de bi-Lipschitz a um triângulo de Hölder padrão. Esta triangulação bi-Lipschitz não é única, mas pode ser modificada para ser única e canônica. Complexo de Hölder é um objeto combinatória, descrevendo esta triangulação canônica. No final do capítulo provamos que o Complexo de Hölder canônico apresenta um invariante completo de bi-Lipschitz, respeito a métrica de comprimento (intrínseca).

No Capítulo 3 apresentaremos uma diferença entre a Geometria Lipschitz intrínseca e Geometria Lipschitz extrínseca. Mas, realmente, existe uma serie especial dos conjuntos semialgébricos, para quais a métrica de comprimento e a métrica ambiental são equivalentes. Este tipo dos conjuntos é chamado os conjuntos normalmente mergulhados. O resultado principal do capitulo é o teorema de existência do mergulho normal de Birbrair e Mostowski (ver Birbrair e Mostowski 2000a). O teorema está dizendo que todo conjunto semialgébrico seria equivalente bi-Lipschitz intrínseco a um conjunto semialgébrico normalmente mergulhado.

No Capítulo 4 apresentamos um tema bastante recente, relacionada a Geometria Ambiental das Superfícies Semilagebraicas, chamada "Metric Knot Theory". Alexandre Fernandes estudou os germes das curvas complexas como germes das superfícies reais e concluiu, que a teoria dos nós topológicos das curvas complexas está bem ligada com teoria métrica destas curvas, veja A. Fernandes (2003). Seria interessante estudar a equivalência Lipschitz ambiental de conjuntos X e Y no caso que os conjuntos são topologicamente equivalentes além disso eles são outer bi-Lipschitz equivalentes. Provaremos um resultado, chamado Teorema de Universalidade, dizendo basicamente que, toda Knot Theory esta mergulhada em problema de classificação bi-Lipschitz ambiental somente no caso que o link de superfície esta desnodado em S^3.

O texto é baseado nos trabalhos com Alexandre Fernandes, Tadeusz Mostowski, Andrei Gabrielov e Michael Brandeanbursky.

1 Curvas

1.1 Semicomplexo de Hölder

Definição 1.1.1. *Um grafo finito completo Γ com uma função de valor racional $\alpha : E_\Gamma \to \mathbb{Q} \cap [1, \infty)$ definida no conjunto das arestas E_Γ de Γ é chamada de* semicomplexo de Hölder *se α satisfaz a seguinte propriedade:*

Propriedade Não-Arquimediana. Para cada três vértices $a_1, a_2, a_3 \in \Gamma$, nos temos: se $\alpha(a_1, a_2) \leqslant \alpha(a_2, a_3) \leqslant \alpha(a_1, a_3)$ então $\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a_2, a_3)$. Note que, como Γ é um grafo completo, qualquer aresta é determinado por dois vértices.

Observação 1.1.2. *O semicomplexo de Hölder pode ser definido de uma maneira equivalente. Seja A um conjunto finito com uma função simétrica $\alpha : A \times A - diag(A \times A) \to \mathbb{Q} \cap [1, \infty)$. Se α satisfaz a propriedade isósceles então o par (A, α) é identificado como o semicomplexo de Hölder.*

Observação 1.1.3. *Considere a função $d : A \times A \to \mathbb{Q}$ tal que:*

$$d(a_1, a_2) = \begin{cases} 0, & se \quad a_1 = a_2 \\ \dfrac{1}{\alpha(a_1, a_2)}, & se \quad a_1 \neq a_2 \end{cases}$$

Então (A, d) é um espaço ultramétrico se, e somente se, (A, α) é um semicomplexo de Hölder.

Definição 1.1.4. *Dois semicomplexos de Hölder (Γ_1, α_1) e (Γ_2, α_2) são chamados* isomorfos (ou combinatorialmente equivalentes) *se existir um isomorfismo de grafo $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tal que, para cada par de vértices $a_1, a_2 \in \Gamma_1$, tivermos:*

$$\alpha_2(h(a_1), h(a_2)) = \alpha_1(a_1, a_2).$$

Definição 1.1.5. *Um* morfismo *de (A_1, α_1) em (A_2, α_2) é uma aplicação $m : A_1 \to A_2$ tal que, para todo $a_1, a_2 \in A_1$,*

$$\alpha_1(a_1, a_2) \leqslant \alpha_2(m(a_1), m(a_2)) \quad se \quad m(a_1) \neq m(a_2).$$

Assim, obtemos que o conjunto de todos os semicomplexos de Hölder é uma categoria, o isomorfismo definido na Definição 1.1.4 é um isomorfismo nesta categoria e a Observação 1.1.3 define um functor desta categoria para a categoria de espaços métricos.

1.2 Curvas semialgébricas e semicomplexos de Hölder

Consideramos primeiramente dois arcos semilagébricos X_1 e X_2 . Suponhamos, que os arcos são parametrizados pelo distancia ate origin. I.E. $|X_i(t)| = t$ Seja $f(t) = |X_1(t) - X_2(t)|$. Pelo teorema de Newton–Puiseux temos o seguinte:

$$f(t) = br^{\alpha} + o(r^{\alpha}), \; \alpha \in \mathbb{Q}, \; b \in \mathbb{R}$$

O número α vamos chamar ordem de tangencia de X_1 e X_2. Usamos a notação $tord(X_1, X_1)$.

Seja $X \subset \mathbb{R}^4$ uma curva semialgébrica e $x_0 \in X$. Pelo teorema da estrutura cônica padrão, temos a seguinte declaração:

Existe uma vizinhança U_{x_0} de x_0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $X \cap U_{x_0} = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ onde os conjuntos X_i tem as seguintes propriedades:

1. X_i é subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$ e homeomorfo ao segmento $[1, 0)$ pelo homeomorfismo $h_i : [1, 0) \to X_i$ tal que $h_i(0) = x_0$;
2. Para todo $i \neq j$, temos $X_i \cap X_j = \{x_0\}$;
3. Existe um número r_0 tal que, para todo i e $0 \leqslant r < r_0$, $\#(X_i \cap S_r(x_0)) = 1$, para todo i. Onde $S_r(x_0)$ representa a esfera centrada em x_0 de raio r.

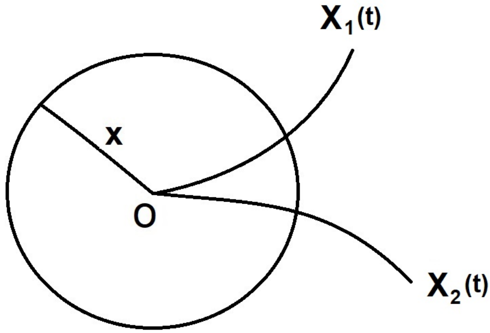

Figura 1.1: Definição de Tord

Observação 1.2.1. *A coleção $\{X_i\}_{i=1}^{k}$ é uma versão 1-dimensional da chamada decomposição em panqueca de (X, x_0), ver Birbrair e Mostowski (2000b), Kurdyka (1992a) e Parusiński (1988). Os elementos desta decomposição nos chamaremos de ramos (da mesma forma que a geometria algébrica complexa) ou panquecas (da mesma forma que a geometria algébrica real).*

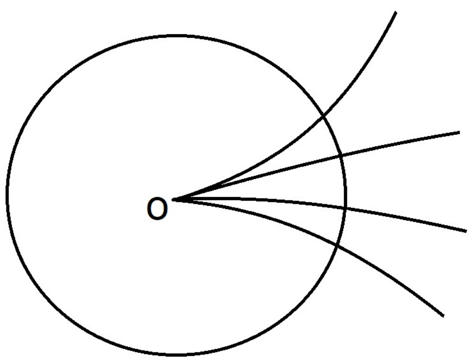

Figura 1.2: Germes de curva com K ramos

Seja A um conjunto de k-elementos $A = \{a_1, ..., a_k\}$. Iremos definir o semi-complexo de Hölder em A da seguinte maneira. Considere a aplicação $X_i(r) = X_i \cap S_r(x_0)$ (para r suficientemente pequeno esta função está bem definida e é semialgébrica). Seja $f_{ij}(r) = \| X_i(r) - X_j(r) \|$. Pelo teorema de Newton–Puiseux obtemos, para r suficientemente pequeno,

$$f_{ij}(r) \ = \ b_{ij}r^{\alpha_{ij}} \ + \ o(r^{\alpha_{ij}}), \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q}, \ b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Definimos $\alpha(a_i, a_j) = tord(X_i, X_J)$.

Proposição 1.2.2. (A, α) *é um semicomplexo de Hölder.*

Demonstração: Como $X_i(r)$ e $X_j(r)$ pertencem a $S_r(x_0)$, nos obtemos $f_{ij}(r) \leqslant 2r$. Por isso, $1 \leqslant \alpha(a_i, a_j)$. Iremos provar a propriedade isósceles. Seja X_1, X_2 e X_3 três ramos diferentes de X. Seja $\alpha(a_1, a_2) \leqslant \alpha(a_2, a_3) \leqslant \alpha(a_1, a_3)$. Considere três pontos $X_1(r)$, $X_2(r)$ e $X_3(r)$. Temos:

$$\begin{aligned} C_1 r^{\alpha(a_1,a_2)} \ + \ o(r^{\alpha(a_1,a_2)}) &= \| \ X_1(r) \ - \ X_2(r) \ \| \\ &\leqslant \| \ X_1(r) \ - \ X_3(r) \ \| \ + \ \| \ X_2(r) \ - \ X_3(r) \ \| \\ &= C_2 r^{\alpha(a_2,a_3)} + o(r^{\alpha(a_2,a_3)}) \end{aligned}$$

para algumas constantes positivas C_1, C_2. Por isso, $\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a_2, a_3)$. □

O semicomplexo de Hölder (A, α) construído acima é chamado de semicomplexo de Hölder associado a (X, x_0). Denotaremos por $sh(X, x_0)$.

Vamos definir outra estrutura associada a X no ponto x_0. Seja X_i e X_j dois ramos de X. Coloque

$$g_{ij}(r) \ = \ dist(X_i - B_r(X_0), X_j - B_r(x_0))$$

(onde $B_r(x_0)$ é a bola centrada em x_0 de raio r.) Pela definição de $g_{ij}(r)$ e a versão de eliminação do quantificador do Teorema de Tarski–Seidenberg, obtemos que g_{ij} é uma função semialgébrica. Por isso, pelo Teorema de Newton–Puiseux,

$$g_{ij}(r) \ = \ c_{ij}r^{\beta_{ij}} \ + \ o(r^{\beta_{ij}}).$$

Coloque $\beta(a_i, a_j) = \beta_{ij}$.

Observação 1.2.3. *Note que $g_{ij}(r)$ não é necessariamente igual a $f_{ij}(r)$. Considere o conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ definido como união dos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = x^3$ no ponto $x_0 = (0, 0)$.*

Lema 1.2.4 (Lema de Comparação de Ordem)**.** *Para todo i, j nos temos $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$.*

Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Geometria Lipschitz das singularidades – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*

Combinatória – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*

Códigos Geométricos – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*

Topologia e geometria de 3-variedades – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*

Ciência de Dados: Algoritmos e Aplicações – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*

Discovering Euclidean Phenomena in Poncelet Families – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além – *Víctor León e Bruno Scárdua*

Equações diferenciais e modelos epidemiológicos – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

Differential Equation Models in Epidemiology – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes – *Sinai Robins*

PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*

First steps into Model Order Reduction – *Alessandro Alla*

The Einstein Constraint Equations – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*

Dynamics of Circle Mappings – *Edson de Faria e Pablo Guarino*

Statistical model selection for stochastic systems – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*

Transfer Operators in Hyperbolic Dynamics – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*

A Course in Hodge Theory Periods of Algebraic Cycles – *Hossein Movasati e Roberto Villaflor Loyola*

A dynamical system approach for Lane–Emden type problems – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*

Visualizing Thurston's Geometries – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*

Scaling Problems, Algorithms and Applications to Computer Science and Statistics – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*

An Introduction to Characteristic Classes – *Jean-Paul Brasselet* impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-56-6

9 786589 124566