

Combinatória

Fábio Botler
Maurício Collares
Taísa Martins
Walner Mendonça
Rob Morris
Guilherme Mota



33^o Colóquio
Brasileiro de
Matemática

Combinatória

Combinatória

Primeira impressão, julho de 2021

Copyright © 2021 Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-65-89124-53-5

MSC (2020) Primary: 05D40, Secondary: 05D05, 05D10, 05C35, 05C40, 05C65

Coordenação Geral

Carolina Araujo

Produção Books in Bytes

Capa Izabella Freitas & Jack Salvador

Realização da Editora do IMPA

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

www.impa.br

editora@impa.br

Sumário

Apresentação	1
Prefácio	2
I Uma Introdução à Combinatória	6
1 Princípios e Técnicas Básicas	7
1.1 Princípio da Casa dos Pombos	7
1.2 Contagem dupla	10
1.3 Princípio da indução matemática	12
1.4 Princípio da Inclusão-Exclusão	16
1.5 Exercícios	20
2 Teoria dos Grafos	22
2.1 Fundamentos	23
2.2 Árvores	27
2.3 Grafos bipartidos	32
2.4 Coloração de vértices	35
2.5 Emparelhamentos	40
2.6 Ciclos Hamiltonianos	42
2.7 Trilhas Eulerianas	44
2.8 Exercícios	45

3	Teoria Extremal dos Grafos	47
3.1	Teorema de Turán	49
3.2	Números extremais de grafos bipartidos	52
3.3	Supersaturação e Estabilidade	59
3.4	Teorema de Erdős e Stone	63
3.5	Exercícios	64
4	Teoria de Ramsey	66
4.1	Números de Ramsey	68
4.2	Teoria de Ramsey infinita	72
4.3	Teoria de Ramsey em grafos	73
4.4	O Problema do Final Feliz	77
4.5	Exercícios	80
5	Método Probabilístico	82
5.1	Fundamentos	83
5.2	Prova probabilística	85
5.3	Método do Primeiro Momento	87
5.4	Sorteios de grafos	93
5.5	Método da Alteração	95
5.6	Método do Segundo Momento	98
5.7	Método da Concentração	103
5.8	Exercícios	107
6	Grafos Aleatórios	109
6.1	Triângulos em $G(n, p)$	110
6.2	Números extremais de ciclos pares	112
6.3	Conexidade de $G(n, p)$	113
6.4	Limiares	115
6.5	Subgrafos pequenos	117
6.6	Teoria de Ramsey em $G(n, p)$	119
6.7	Exercícios	124
II	Tópicos Avançados	126
7	Teoria Extremal dos Conjuntos	127
7.1	Anticadeias e sistemas de Bollobás	128
7.2	Famílias intersectantes	132

7.3	Álgebra Linear e famílias intersectantes	136
7.4	Teorema de Kruskal e Katona	143
7.5	Exercícios	149
8	Teoria Extremal dos Grafos	152
8.1	Teorema de Erdős e Stone	152
8.2	Estabilidade	157
8.3	Problema de Turán para hipergrafos	161
8.4	Supersaturação para hipergrafos	165
8.5	Teorema de Andrásfai, Erdős e Sós	167
8.6	Limiars cromáticos	170
8.7	Números extremais de ciclos pares	172
8.8	Construções de grafos sem C_4	178
8.9	Exercícios	179
9	Teoria de Ramsey	182
9.1	Teoria de Ramsey Aditiva	182
9.2	Números de Ramsey para grafos	189
9.3	Números de Ramsey para hipergrafos	195
9.4	Exercícios	204
10	Método Probabilístico	206
10.1	Lema Local de Lovász	206
10.2	As desigualdades de Janson	215
10.3	Escolha Aleatória Dependente	224
10.4	Exercícios	232
11	Método da Regularidade	233
11.1	Lema da Regularidade de Szemerédi	234
11.2	Lemas de imersão e contagem	236
11.3	Aplicações	241
11.4	Demonstração do Lema da Regularidade	252
11.5	Exercícios	257
12	Método dos Contêineres	259
12.1	Conjuntos independentes em grafos	260
12.2	Aplicações em grafos	266
12.3	Conjuntos independentes em hipergrafos	271
12.4	Aplicações em hipergrafos	274

12.5 Caso geral do Lema de Contêineres	284
12.6 Demonstrações dos lemas	286
12.7 Exercícios	289
Bibliografia	292
Índice de Notações	301
Índice de Autores	302
Índice Remissivo	303

Apresentação

Endre Szemerédi, ao receber o Prêmio Abel em 2012, afirmou que considerava seu prêmio como um “reconhecimento das áreas de matemática discreta e teoria da computação”. Este ano, László Lovász e Avi Wigderson foram os laureados do Prêmio Abel, pelas suas contribuições à consolidação da matemática discreta e da teoria da computação como “disciplinas centrais da matemática moderna”. Essas premiações são indicações claras de que a matemática discreta e a teoria da computação devem estar presentes nos currículos atuais de matemática.

Neste livro, o leitor encontrará uma belíssima introdução à área de matemática discreta, com foco em duas de suas áreas mais maduras e mais ativas: a combinatória extremal e a combinatória probabilística. Trata-se de áreas cujo criador mais célebre foi Paul Erdős, e que foram moldadas por, entre outros, Szemerédi, Lovász e Wigderson. Pode-se também dizer que são subáreas da combinatória assintótica, por tratarem frequentemente de objetos de grandes proporções.

O leitor é apresentado, inicialmente, aos princípios básicos da combinatória, como o princípio da casa dos pombos e a contagem dupla. A jornada, que começa assim inocentemente, passa por vários tópicos clássicos e essenciais da área, mas rapidamente chega a tópicos modernos, como o *método da regularidade* de Szemerédi e o *método dos contêineres*, que são de grande abrangência e fazem parte do ferramental essencial de todo pesquisador interessado em combinatória assintótica.

Os autores selecionaram os tópicos desenvolvidos neste livro de forma que o leitor, após o estudo deste material, não só conhecerá os fundamentos da combinatória assintótica, mas terá também sua sensibilidade desenvolvida e refinada para

apreciar os avanços que ainda estão por vir.

Escreveram este livro jovens doutores e professores, talentosos e enérgicos, e um jovem professor titular, que despontou na comunidade internacional de combinatória de forma espetacular, com uma série de contribuições surpreendentes e profundas, que marcadamente avançaram o estado da arte. Cabe mencionar que o método dos contêineres, abordado no último capítulo deste livro, é uma de suas contribuições. Com certeza, o leitor não poderia ter condutores melhores que os autores deste livro para adentrar as áreas de combinatória extremal e combinatória probabilística.

Este livro é uma excelente adição à literatura matemática em português. Assim como os autores, acredito que entre seus leitores surgirão entusiastas, que se tornarão pesquisadores dedicados à combinatória e que contribuirão com resultados de impacto.

Yoshiharu Kohayakawa
Universidade de São Paulo
São Paulo, 29 de junho de 2021

Prefácio

A Combinatória pode ser definida de forma simplista como a arte de contar, enumerar, ordenar, construir e analisar objetos matemáticos discretos. No entanto, ela é muito mais que isso, sendo um ramo da matemática com aplicações tanto na ciência da computação quanto em diversas áreas da matemática. Assim, preferimos descrevê-la como um conjunto de técnicas e estratégias para lidar com estruturas discretas. Além disso, uma característica fundamental da Combinatória é a sua ênfase em problemas de fácil formulação (até auto-contidos) mas desafiadores.

Outra característica notável da Combinatória é a sua relativa “juventude”. Apesar de cálculos de natureza discreta fazerem parte de toda a matemática, antes do século XX tais tópicos eram desenvolvidos de maneira desconexa, na medida em que certos objetos eram utilizados em áreas como Análise e Topologia¹. A Combinatória como uma área da matemática propriamente dita surgiu primariamente devido aos trabalhos da escola húngara, liderada por Paul Erdős e seus colaboradores, e pelo desenvolvimento da computação teórica. Uma parte substancial do material apresentado neste livro foi desenvolvida nos últimos 50 anos, e várias das provas que veremos foram publicadas na última década.

Assim, jovens estudantes e pesquisadores têm hoje uma rara oportunidade de contribuir com as bases fundamentais de uma área da matemática. Ao mesmo tempo em que pesquisadores de Combinatória vêm sendo condecorados com grandes distinções, como os Prêmios Abel de 2012 e 2021, é quase certo que outros resultados gerais e fundamentais (como os recentes resultados que veremos nos Capítulos 11 e 12) serão descobertos nas próximas décadas, talvez pelo público-alvo deste livro.

Nas últimas décadas, contribuições fundamentais para a Combinatória foram obtidas no Brasil. Preparamos este livro como um convite para a área, com o

¹O nome “Análise Combinatória” vem dessa época e precede o desenvolvimento sistemático da Combinatória. A área se desenvolveu muito desde então, e o nome preferido por pesquisadores da área é simplesmente “Combinatória”.

objetivo maior de atrair mais pessoas para contribuir com a Combinatória em nosso país e a ambição de que muitos outros desenvolvimentos importantes originem-se aqui. Por isso, a primeira decisão tomada a respeito do presente livro foi fazê-lo em português.

Como usar este livro

Este texto foi inicialmente elaborado para servir de base para o curso “Introdução à Combinatória Extremal”, ministrado no 33^o Colóquio Brasileiro de Matemática, em 2021, e aproveitamos a oportunidade para produzir uma literatura robusta e sem pré-requisitos que sirva como um guia para a organização e criação de cursos de Combinatória no país, em nível de graduação e pós-graduação.

Neste livro, buscamos fornecer um conteúdo autocontido para que alunos interessados em Combinatória tenham um material cuidadosamente organizado para guiar seus estudos. Para facilitar o entendimento dos assuntos apresentados, fornecemos diversos exercícios, permitindo que os alunos aperfeiçoem e testem seus conhecimentos durante o aprendizado. Em particular, sugerimos aos leitores que não mergulhem em uma demonstração imediatamente após ler um enunciado: gastar alguns minutos para tentar desenvolver sua própria prova (discutindo com colegas se possível) levará a um maior aproveitamento da demonstração que incluímos no texto.

Este livro está dividido em duas partes, cada uma com 6 capítulos. A Parte I contém conteúdo para um curso de Introdução à Combinatória, tanto para a graduação quanto para a pós-graduação. O leitor será introduzido às técnicas básicas no Capítulo 1, passando por grafos, que são estruturas importantíssimas tanto do ponto de vista teórico como prático, no Capítulo 2. No Capítulo 3, apresentamos a Combinatória Extremal que, dito de forma simples, estuda o tamanho máximo ou mínimo que estruturas matemáticas que contêm dadas propriedades podem ter. No Capítulo 4, introduzimos a Teoria de Ramsey, que estuda a existência de certas subestruturas em estruturas suficientemente grandes. Nos Capítulos 5 e 6, o leitor terá contato com dois assuntos fascinantes: o *Método Probabilístico*, que nos permite mostrar que objetos matemáticos existem, mesmo que não saibamos como construí-los; e grafos aleatórios, que são estruturas interessantes por si só e nos permitem explorar o comportamento típico de um grafo, o que os faz úteis em inúmeras aplicações.

Na Parte II revisitamos os temas apresentados na Parte I, apresentando resultados e técnicas mais profundas e avançadas. Essa parte contém resultados que

podem ser incorporados a um curso introdutório caso haja tempo, mas seu conteúdo foi pensado para ser utilizado em um curso avançado de Combinatória na pós-graduação, ou como material de aprofundamento aos alunos interessados. Nos Capítulos 7 e 8, nos aprofundamos na Combinatória Extremal, estudando problemas, respectivamente, em conjuntos e em grafos; no Capítulo 9, nos aprofundamos na Teoria de Ramsey, com problemas em Teoria de Ramsey Aditiva, uma área bastante íntima da Teoria dos Números, e variações importantes dos problemas vistos no Capítulo 4. No Capítulo 10, apresentamos três técnicas probabilísticas mais avançadas: o Lema Local de Lovász, a Escolha Aleatória Dependente, e as desigualdades de Janson. Finalmente, os Capítulos 11 e 12 apresentam resultados descobertos nas últimas décadas, e que revolucionaram a Combinatória: o Método da Regularidade e o Método dos Contêineres. Tais métodos se tornaram parte do ferramental indispensável a um pesquisador em Combinatória, fornecendo provas curtas e elegantes para problemas que ficaram em aberto por muito tempo.

E depois?

Para nós, fazer Combinatória é uma atividade divertida, e esperamos que este livro seja capaz de transmitir tal prazer. Essa diversão se deve sobretudo ao fato da Combinatória ser uma área altamente colaborativa, ambiente que esperamos que os leitores consigam reproduzir ao discutir os resultados e resolver os exercícios.

Como comentamos anteriormente, Combinatória é uma área de certa forma jovem. Por isso, depois de estudar este livro, acreditamos que você estará apto a colaborar não só em exercícios, mas também em problemas de pesquisa nas subáreas que cobrimos. O principal recurso para acompanhar tais áreas de pesquisa de perto é o arXiv, onde pesquisadores enviam versões pré-revisão dos seus artigos. Leitores interessados comprovarão, após estudar este livro, que (propositalmente) uma parte considerável dos artigos publicados na seção de Combinatória do arXiv, acessível em <https://arxiv.org/list/math.CO/new>, trata de tópicos que discutimos no texto.

Desejamos a todos uma boa diversão!

Fábio Botler
Maurício Collares
Taísa Martins
Walner Mendonça
Rob Morris
Guilherme Mota

Parte I

Uma Introdução à Combinatória

Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Geometria Lipschitz das singularidades – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*

Combinatória – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*

Códigos Geométricos – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*

Topologia e geometria de 3-variedades – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*

Ciência de Dados: Algoritmos e Aplicações – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*

Discovering Euclidean Phenomena in Poncet Families – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além – *Victor León e Bruno Scárdua*

Equações diferenciais e modelos epidemiológicos – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

Differential Equation Models in Epidemiology – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes – *Sinai Robins*

PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*

First steps into Model Order Reduction – *Alessandro Alla*

The Einstein Constraint Equations – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*

Dynamics of Circle Mappings – *Edson de Faria e Pablo Guarino*

Statistical model selection for stochastic systems – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*

Transfer Operators in Hyperbolic Dynamics – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*

A Course in Hodge Theory Periods of Algebraic Cycles – *Hossein Movasati e Roberto Villaflor Loyola*

A dynamical system approach for Lane–Emden type problems – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*

Visualizing Thurston’s Geometries – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*

Scaling Problems, Algorithms and Applications to Computer Science and Statistics – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*

An Introduction to Characteristic Classes – *Jean-Paul Brasselet*



Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-53-5



9 786589 124535