Topologia e geometria de 3-variedades

Uma agradável introdução

André Salles de Carvalho
Rafał Marian Siejakowski

impa

33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Topologia e geometria de 3-variedades

Uma agradável introdução

Topologia e geometria de 3-variedades
Primeira impressão, julho de 2021

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-65-89124-51-1
MSC (2020) Primary: 57K30, Secondary: 53A35, 53A04, 57K32, 57K35

Coordenação Geral Carolina Araujo

Produção Books in Bytes **Capa** Izabella Freitas & Jack Salvador

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
`www.impa.br`
`editora@impa.br`

Sumário

Prefácio

No passado distante, humanos achavam que a Terra era plana e isso durou, de uma forma ou outra, pelo menos, até a Idade Média. Aos poucos, a humanidade foi se apropriando do fato de que estávamos em um planeta esférico, que deveria, portanto, ser chamado de uma *esfereta*. Independentemente do nome que damos a ela, o que é importante pontuar aqui é que, do ponto de vista de um ser das dimensões de um mamífero superior como um homem ou um mamute, a Terra parece plana e não haveria qualquer vantagem prática em sabê-la esférica. Para navegantes, por outro lado, que percorrem distâncias enormes, é fundamental saber que a Terra é esférica.

Apesar de tudo o que aconteceu desde os egípcios, gregos e romanos; de Dante Alighieri, Leonardo da Vinci, Michelangelo e do Renascimento; das Revoluções Científica, Francesa, Industrial e Russa; de Shakespeare, Bach, Camões, Napoleão, Beethoven, Gauss e Einstein; nós, humanos, ainda não sabemos a forma do nosso Universo. Que não saibamos se há ou não outros universos, talvez paralelos ao nosso, é provavelmente irrelevante. Porém, que saibamos pouco mais sobre a forma do nosso Universo do que qualquer mamute sabia sobre a forma da Terra, quando na Terra havia mamutes, talvez seja uma lição de humildade que todos devamos ter em mente, se não constantemente (talvez seja deprimente se comparar com mamutes diariamente), ao menos em momentos difíceis ou especialmente filosóficos da vida.

O objetivo destas notas não é infelizmente revelar a forma do universo: é discuti-la. Mais precisamente, o que fazemos aqui é desenvolver técnicas matemáticas para analisar espaços tridimensionais e usá-las para estudar espaços específicos de forma a ajudar o leitor a entender o que é "entender" um espaço tridimensional. Boa parte do texto é dedicada à 3-esfera, um dos espaços tridimensionais mais simples e, ainda assim, fascinante, que apresenta diversas características surpreendentes para nossa intuição "euclidiana". Entender bem a 3-esfera pode ser considerado o fio condutor destas notas, mas não deixamos de observar a paisagem e a vista de lugares interessantes por onde passamos ao longo da viagem.

Como exercício intelectual preliminar, propomos que a leitora se ponha no lugar de uma mulher das cavernas, especialmente inteligente e longeva, a quem ocorre, depois de muito viajar, das savanas da África, pelo Oriente Médio, Índia, Indonésia até chegar à Austrália, depois de ter observado com atenção o céu de todos esses lugares, que talvez a terra "não tenha fim", isto é, que seja sempre possível continuar a caminhar, em qualquer direção, sem jamais chegar ao "fim do mundo" em uma borda da qual se cai no vazio. Durante a jornada, nossa personagem teve tempo para desenvolver instrumentos de navegação e decide fazer um experimento: fazer uma viagem sempre em direção ao sul e ver o que acontece. Ela sai de Perth, na Austrália, passa muito tempo no mar, chega a um lugar onde passa muito frio até chegar a um ponto onde seus instrumentos ficam confusos, mas vai em frente, agora na direção norte; vê pinguins tomando chimarrão, anda bastante, passa por um deserto sequíssimo, depois por uma floresta luxuriante, atravessa um canal, sente a terra tremer sob seus pés, vê árvores gigantes, até começar a sentir frio de novo e novamente chegar a outra parte muito fria, que desorienta seus instrumentos. Segue em frente e começa a andar para o sul, vê ursos fofinhos e mamutes, até começar a ver cangurus novamente e chegar de volta a Perth. Sendo uma pessoa prevenida, muito hábil e tendo tido um sonho, na véspera da viagem, com uma mulher chamada Ariadne, ela havia levado um grande rolo de fio vermelho que ia desenrolando por onde passava. Quando chegou de volta a Perth, amarrou a ponta final do fio vermelho ao mesmo tronco de árvore em que tinha amarrado a ponta inicial ao sair de casa. Como tinha um espírito indômito e gostava de viajar, resolveu fazer outra viagem. Mas não gostava de passar frio e não tinha mais fio vermelho, de modo que, tentando evitar aquelas paragens desagradáveis da viagem anterior, partiu dessa vez para oeste desenrolando um fio azul. Muito viajou, não passou frio, passou por cima do fio vermelho em Santiago, no Chile, e voltou a Perth feliz da vida. Isso a fez concluir que a Terra era algo semelhante a um círculo, só que bidimensional. No círculo, em qualquer direção que se ande (há duas escolhas), sempre voltamos ao ponto inicial. No "hipercírculo" bidimensional o mesmo acontece e, embora tenhamos muitas escolhas de direções a explorar, sempre voltamos ao ponto onde começamos (sem tropeçar na borda e cair no vazio) e sempre cruzamos exatamente uma vez qualquer outro caminho que tenhamos percorrido em viagens pregressas.

Por uma dessas coincidências difíceis de explicar – a menos que pensemos em escalas de tempo muito grandes – exatamente no mesmo instante quando nossa personagem estava saindo de Perth pela primeira vez, uma alienígena das cavernas em um mundo distante, igualmente inteligente, hábil e indômita, estava, ela mesma, fazendo exatamente o mesmo, com o mesmo intuito. Embora os nomes de países e cidades nesse outro mundo sejam impronunciáveis, tudo aconteceu exatamente como na Terra. Bem, quase tudo: a única diferença, sutil, foi que a alienígena não reencontrou o fio vermelho durante a viagem azul. Ela concluiu que seu mundo, de fato, não tinha fim, como o círculo, mas sua analogia parou aí. Fez, então, uma viagem no sentido sudoeste desenrolando um fio branco e, mais uma vez, só reencontrou os fios vermelho e azul ao voltar pra casa, onde os tinha amarrado no início das viagens anteriores. A essa altura, já um pouco cansada, mandou suas quatro filhas em quatro direções diferentes e todas voltaram pra casa tendo encontrado exatamente um dos fios vermelho, azul ou branco, exatamente uma vez. Ao mandar as filhas viajarem, a alienígena queria, além de descansar, ter tempo para pensar e considerar o problema de um ponto de vista um pouco diferente: ao invés de se perguntar a forma do seu mundo, adotou uma atitude mais elucubrativa e começou a perguntar-se quais seriam todas as *possíveis* formas de mundos universo afora.

O assunto destas notas são os desenvolvimentos de caráter matemático relacionados a essa mesma pergunta, mas em dimensão três: quais são os possíveis “universos tridimensionais” e quais são suas propriedades? Se vivêssemos em um desses universos, como ele pareceria “de dentro”? Para dar o primeiro passo nessa direção, podemos começar pensando nos mundos bidimensionais que “se fecham sobre si mesmos”, chamados por matemáticos de *superfícies compactas*. A mais simples entre superfícies é o “hipercírculo”, que rebatizamos como *esfera*. Por analogia, deveria existir uma “hiperesfera”, que matemáticos chamam de 3-*esfera* e, como não há razão alguma para pararmos, podemos definir *n-esferas* em geral. Porém, uma pessoa “normal” – o que também inclui muitos matemáticos – não sabe imaginar a 3-esfera, que não pode ser desenhada da perspectiva de um observador externo. Nesse sentido, um dos principais objetivos deste livro é fazer com que o leitor deixe de ser normal e desenvolva uma capacidade de descrever, com precisão igual àquela de uma testemunha ocular, como seria viver e voar em um universo como a 3-esfera. Do mesmo modo, olhando para a segunda superfície compacta da lista, a superfície do mundo da exploradora alienígena, que chamamos de *toro*, podemos imaginar um espaço tridimensional análogo – um “hipertoro”, que chamaremos de 3-toro, a ser discutido nos Capítulos 3 e 4. Com um pouco de engenho e criatividade, é possível construir vários outros exemplos de 3-variedades compactas – espaços tridimensionais que se fecham sobre si mesmos – o que nos leva à próxima pergunta natural sobre o assunto: como “organizar” as 3-variedades?

Vale a pena pensar sobre como matemáticos organizam seus objetos de estudo, mas falemos aqui de um caso concreto, muito pertinente à presente discussão. Desde o início do século XX, sabe-se como classificar as superfícies compactas e essa classificação é razoavelmente simples: é possível separá-las em dois tipos – as *orientáveis* e as *não orientáveis* – e fazer uma lista ordenada das superfícies de cada tipo. São listas infinitas, é verdade, mas, enquanto classificação, essa só não é mais simples que uma lista finita. A ordenação dentro de cada lista é feita por um invariante topológico chamado *característica de Euler*, que definimos no Capítulo 3. Poderíamos (deveríamos, aliás) nos fazer as seguintes perguntas ao passarmos para o mundo das 3-variedades: É possível classificar 3-variedades compactas? Se sim, seria razoável esperar que essa classificação fosse por meio de uma lista? Ou um número finito de listas? Ou uma lista infinita de listas talvez? Podemos obter uma classificação topológica usando invariantes (topológicos) que conseguimos calcular? Seria essa a melhor estratégia ou deveríamos considerar outras maneiras de tentar classificá-las?

A história do estudo sistemático das 3-variedades começa com Henri Poincaré, na virada dos séculos XIX para o XX, em seis artigos, o primeiro chamado *Analysis Situs* e os seguintes chamados de "complementos". Neles Poincaré introduziu vários conceitos e técnicas que formaram a base da área da matemática que hoje chamamos de topologia. Nesses complementos, ele formulou (no segundo, e reformulou no quinto) a pergunta que posteriormente se tornaria conhecida como *Conjectura de Poincaré*. Vários matemáticos fizeram importantes contribuições para a compreensão de 3-variedades ao longo do século XX, até que William Thurston enunciou, no final dos anos 1970, a chamada *Conjectura de Geometrização*, que contém a Conjectura de Poincaré como um caso particular, propondo uma forma de organizar o conjunto de todas as 3-variedades, usando não apenas sua topologia, mas também geometrias superimpostas sobre a "base" topológica. A Conjectura de Geometrização foi demonstrada quase exatos 100 anos após o trabalho pioneiro de Poincaré, nos primeiros anos do século XXI, por Grigori Perelman.

Não entraremos aqui em maiores detalhes sobre essas conjecturas e teoremas, o que exigiria o uso de muitas palavras "difíceis". Ao longo do texto, discutiremos vários desses assuntos, mas continuaremos a evitar muitos outros por serem mais avançados do que seria razoável incluir em notas que se propõem realmente – e não apenas no título – introdutórias. Discutiremos aspectos topológicos, mas não falaremos de grupos de homologia e homotopia, por exemplo. Também introduziremos geometrias em 3-variedades, não apenas porque ajudam muito nossa intuição visual e espacial sobre elas, mas também porque estão intimamente relacionadas à sua topologia. Desse modo, traremos a leitora mais próxima de ser capaz de entender as Conjecturas de Poincaré e de Geometrização e até, futuramente, suas demonstrações.

Há dois livros excelentes – excepcionais, na verdade – que forneceram inspiração e muita informação que usamos para escrever as nossas notas. O primeiro é um livro "elementar": *The Shape of Space*, de Jeffrey Weeks (2002). O segundo é, ao contrário, um livro bastante avançado: *Three-Dimensional Geometry and Topology*, de Bill Thurston (1997). O primeiro o leitor pode ler a qualquer momento e recomendamos entusiasmadamente que o faça. O segundo requer maior maturidade matemática que, esperamos, será adquirida, ao menos em parte, lendo o que escrevemos aqui. Após fazê-lo, também recomendamos, igualmente entusiasmadamente, que a leitora o consulte.

Como usar este livro

É importante esclarecermos, logo no início, o que se pode e o que não se deve esperar dessas notas. Elas foram escritas como um grande "estudo dirigido", isto é, ao contrário do que acontece com a maioria (a quase totalidade, talvez) dos livros de matemática que o leitor conhece, elas devem ser lidas mais ou menos como um romance, da primeira página à última, em ordem. Ao contrário dos romances, no entanto, há um sem número de exercícios cujo objetivo é fazer a leitora entender o que está sendo dito a cada passo. A grande maioria dos resultados que seriam costumeiramente chamados de lemas, proposições e corolários, aqui são chamados de exercícios. Esperamos que isso não torne o livro de difícil leitura, apenas de leitura um pouco mais trabalhosa do que livros tradicionais: os exercícios são, em sua maioria, de simples resolução e acompanham o desenvolvimento do que teria sido uma aula detalhada sobre os assuntos discutidos. Muitas vezes isso terá, também esperamos, a vantagem de deixar para o leitor o trabalho e o prazer de realizar "o pulo do gato", que nos faz verdadeiramente entender matemática. A desvantagem é que talvez as notas não sejam muito boas como obra de referência. Entretanto, mesmo chamá-la de "obra" está muito distante do que ambicionamos, e esperamos que cumpram satisfatoriamente o papel de tornar melhor conhecido esse assunto fascinante, que nos parece, no Brasil pelo menos, menos popular do que mereceria.

Pré-requisitos

Estas notas são destinadas a todo público matemático, incluindo estudantes de graduação, portanto não têm muitos pré-requisitos absolutos. Esperamos, no entanto, que a leitora tenha alguma familiaridade com as noções básicas de topologia: espaços topológicos, homeomorfismos, espaços métricos. Vamos também usar alguma teoria de grupos e algum cálculo em várias variáveis reais, além de mencionar análise complexa poucas vezes.

Estrutura do livro

Há quatro capítulos, como não poderia deixar de ser, com dificuldades aproximadamente crescentes. No Capítulo 1, introduzimos as esferas, de qualquer dimensão, e discutimos inversões e projeção estereográfica. Embora introdutório, esse capítulo revela muitas propriedades fascinantes das esferas e da geometria de inversões – transformações que preservam ângulos, mas não distâncias. No Capítulo 2, falamos principalmente da 3-esfera, centrando nossa atenção na álgebra dos quatérnios e nas estruturas adicionais que a 3-esfera adquire do grupo dos quatérnios unitários – em particular, discutimos em detalhe a fibração de Hopf, que decompõe a 3-esfera em uma união de círculos. No Capítulo 3, introduzimos o conceito de n-variedades – espaços que "são" localmente como o espaço $\mathbb{R}^n$, mostrando vários exemplos e maneiras de construir variedades em geral, e 3-variedades em particular. No Capítulo 4, falamos de três geometrias diferentes em espaços tridimensionais: geometria euclidiana, esférica e hiperbólica. Mostramos também alguns exemplos de 3-variedades com essas geometrias.

Agradecimentos

Agradecemos os vários comentários, correções e sugestões feitos pelos participantes de um curso de introdução às 3-variedades que estamos ministrando no primeiro semestre de 2021 no IME-USP. Agradecemos especialmente à Luciana Menezes Vasconcelos, que leu cuidadosamente os dois primeiros capítulos antes de começarmos o curso.

Se leitores quiserem enviar comentários, correções e sugestões, ficaremos também muito gratos. Enviem-nos, por favor, para

`andre@ime.usp.br` ou `rafal@ime.usp.br`.

Durante a preparação destas notas, Rafał M. Siejakowski recebeu o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo Nº 2018/12483-0. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade dos autores e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

1 Como entender as esferas

A geometria elementar, que todos estudamos na escola, trata, na sua maior parte, de objetos "retos": linhas retas no plano e planos dentro do espaço euclidiano tridimensional. Usando esses objetos primitivos, podemos construir outras formas geométricas, como polígonos e poliedros. Os objetos "redondos", que mais raramente ocorrem na educação escolar, são principalmente as esferas: o círculo (a 1-esfera) e a 2-esfera, chamada simplesmente de "esfera". Como é claro, o resto das formas geométricas redondas que encontramos na escola, como cones e cilindros, também devem a sua "redondeza" ao círculo.

Neste capítulo, vamos desenvolver uma abordagem um pouco diferente da geometria, pois vamos considerar as formas redondas – as esferas – como os objetos mais fundamentais. Pensemos primeiro em um círculo no plano e imaginemos que o seu raio aumenta para infinito. Para raios muito grandes, é praticamente impossível distingui-lo de uma linha reta. Analogamente, uma esfera de raio gigantesco é quase um plano, como a superfície da Terra parecia aos mamutes do pleistoceno. Desse modo, podemos tratar linhas retas como limites de enormes círculos, e planos de enormes esferas.

A cada reta no plano euclidiano corresponde uma *reflexão* – uma transformação isométrica do plano que fixa a reta e que leva o semiplano de um lado ao semiplano do outro e vice versa. Analogamente, cada plano no espaço tridimensional

Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Geometria Lipschitz das singularidades – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*

Combinatória – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*

Códigos Geométricos – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*

Topologia e geometria de 3-variedades – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*

Ciência de Dados: Algoritmos e Aplicações – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*

Discovering Euclidean Phenomena in Poncelet Families – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além – *Víctor León e Bruno Scárdua*

Equações diferenciais e modelos epidemiológicos – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

Differential Equation Models in Epidemiology – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes – *Sinai Robins*

PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*

First steps into Model Order Reduction – *Alessandro Alla*

The Einstein Constraint Equations – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*

Dynamics of Circle Mappings – *Edson de Faria e Pablo Guarino*

Statistical model selection for stochastic systems – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*

Transfer Operators in Hyperbolic Dynamics – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*

A Course in Hodge Theory Periods of Algebraic Cycles – *Hossein Movasati e Roberto Villaflor Loyola*

A dynamical system approach for Lane–Emden type problems – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*

Visualizing Thurston's Geometries – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*

Scaling Problems, Algorithms and Applications to Computer Science and Statistics – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*

An Introduction to Characteristic Classes – *Jean-Paul Brasselet* impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-51-1

9 786589 124511