

# Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além

Víctor León  
Bruno Scárdua



33<sup>o</sup> Colóquio  
Brasileiro de  
Matemática

# **Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além**

# **Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além**

Primeira impressão, julho de 2021

Copyright © 2021 Víctor León e Bruno Scárdua.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

**ISBN** 978-65-89124-45-0

**MSC** (2020) Primary: 57R70, Secondary: 37C27, 32S65, 37C75, 57R30, 37F75

**Coordenação Geral**

Carolina Araujo

**Produção** Books in Bytes

**Capa** Izabella Freitas & Jack Salvador

**Realização da Editora do IMPA**

**IMPA**

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

[www.impa.br](http://www.impa.br)

[editora@impa.br](mailto:editora@impa.br)

# *Apresentação*

---

O objetivo deste livro é basicamente oferecer aos alunos de graduação de universidades brasileiras, um livro introdutório à teoria geométrica das equações diferenciais e dos sistemas dinâmicos. Com uma apresentação baseada nos resultados básicos da teoria das equações diferenciais ordinárias, focando nas autônomas, ou seja, aquelas dadas por campos de vetores. O caráter geométrico e suas relações com a topologia são abordados sempre que oportuno. Partindo de ambientes como subconjuntos abertos do espaço euclidiano, chegamos ao estudo dos temas propostos em ambientes mais gerais como superfícies regulares e, na segunda parte do texto, em variedades diferenciáveis. Tentamos adequar o texto à realidade das necessidades e possibilidades dos estudantes radicados no Brasil, sem sacrificar o nível final do texto e sua consequente utilidade. Este livro não foi concebido para ser usado como o livro-texto de um primeiro curso de equações diferenciais, que pensamos deva ser mais dedicado ao aprendizado dos conceitos básicos e métodos de resolução das mesmas. Este texto é pensado para ser, sim, um primeiro texto no estudo dos métodos geométricos em equações diferenciais, campos de vetores e sistemas dinâmicos. Na nossa visão, um texto dessa natureza deve incentivar e motivar muitos estudantes ao estudo de tais temas, iniciando assim uma possível carreira na pesquisa científica em ciências naturais. Também deve servir de literatura em língua portuguesa no Brasil para temas que em geral são tratados apenas em livros provenientes de outros países, cujo ensino possui, neste nível, características muito distintas, nem sempre facilitando o aprendizado de nossos estudantes. Enfim, resgatar a valorização dos métodos geométricos como esteio no aprendizado de conceitos e técnicas em matemática, mais especificamente em sistemas

dinâmicos e equações diferenciais, é também um dos principais objetivos deste texto.

# *Prefácio*

---

Um dos aspectos pouco estudados nos cursos de graduação é a interação entre geometria, topologia e dinâmica em um dado espaço, por exemplo, uma hipersuperfície no espaço euclidiano. Nos cursos de Matemática, o foco principal costuma ser em aspectos algébricos (cursos de Álgebra de Polinômios, Grupos e Álgebra Linear) e na resolução de problemas oriundos e por meio do Cálculo Diferencial e Integral. Isto inclui a abordagem dada às equações diferenciais ordinárias (EDO). Neste texto de nível introdutório (Graduação, Iniciação Científica, início de Mestrado) pretendemos motivar o estudo futuro de assuntos modernos em Dinâmica, Geometria e Topologia, por meio da introdução dos conceitos e resultados mais básicos acerca dessa interação entre ditas áreas. Tal curso deve servir de motivação para o estudo de várias vertentes modernas da Matemática, incluindo mas não limitadas a essas áreas: Sistemas Dinâmicos em Variedades, Dinâmica de Aplicações e Teoria Geométrica das Folheações. A escolha dos temas foi elaborada tendo-se em conta a necessidade de deixar alguns marcos claramente definidos, apresentar alguns dos resultados mais fundamentais que evidenciam a conexão entre elas e estimular o aluno a seguir adiante aprendendo.

Os pré-requisitos para este livro são mínimos, dentro da filosofia de um curso introdutório. O principal é um curso de Cálculo de um ano (dois semestres), cobrindo até um pouco de equações diferenciais ordinárias. Também é desejável um semestre de Física, para familiaridade com a linguagem de campos de vetores. Seria ótimo ter algumas noções de Análise Real, como a noção de função analítica, mas que podem vir dos cursos de Cálculo acima mencionados. Um pouco de Geometria (esferas, toros, superfícies) também pode ser aconselhável, embora

não seja absolutamente imprescindível. Enfim, se possível alguns rudimentos de Topologia para a parte final. Contudo o mais importante é uma boa dose de interesse, perseverança e disposição para enfrentar desafios. Não podemos esquecer de curiosidade e interesse em aprender ciências.

Como já mencionamos acima, um dos objetivos deste curso é motivar o estudo futuro de assuntos modernos em Dinâmica, Geometria e Topologia, por meio da introdução dos conceitos e resultados mais básicos entre as áreas. Pretendemos também apresentar uma área, ou abordagem distinta do que se vê regularmente nos cursos de graduação em Matemática, Física etc, motivando uma linha de pensamento mais globalizada e com mais possibilidades de conexão entre as diversas disciplinas estudadas pelos alunos. Desta forma, uma eventual transição entre a graduação e os programas de pós-graduação (mestrado, doutorado) seria mais natural e menos potencialmente brusca. Esperamos também resgatar o interesse dos jovens estudantes dos cursos de graduação e início de mestrado, em áreas não tipificadas como centrais, mas que concentram, sim, grande parte da produção científica qualificada em Matemática realizada no Brasil.

Este livro foi escrito segundo nossa visão particular do que é relevante e imprescindível em um primeiro curso de Dinâmica e Geometria via equações diferenciais ordinárias. Desenvolvemos e utilizamos para isto, material eventualmente mais avançado do que aquele contido no programa dos cursos de Cálculo da graduação. Tentamos, na medida do possível, preservar a motivação e intuição físico-geométrica, que devem compor um bom texto sobre o tema.

No primeiro capítulo, apresentamos o conceito de equação diferencial ordinária, assim como os Problemas de Cauchy e Picard, e o Teorema de Picard sobre a existência e unicidade de soluções para o Problema de Cauchy. Iniciamos por exemplos clássicos de equações diferenciais ordinárias: a equação do pêndulo simples, o problema de desintegração do rádio e o teorema fundamental do cálculo. Os conceitos e resultados são, então, apresentados como resposta a questões gerais naturalmente sugeridas por esses exemplos. Nos capítulos seguintes, a teoria qualitativa e geométrica das EDOs e dos sistemas dinâmicos é apresentada e desenvolvida de forma suave e crescente. Iniciando em ambientes abertos do espaço euclidiano, seguimos pouco a pouco para o ambiente mais abstrato das superfícies e finalmente para as variedades diferenciáveis.

O modo como este texto foi escrito está baseado em nossa experiência em cursos de graduação e pós-graduação em universidades federais brasileiras. Um dos maiores desafios, e também motivação, foi a ausência de textos escritos originalmente em língua portuguesa em nosso país.

Esperamos ter alcançado parcialmente o objetivo inicial e que o livro possa

ser útil não apenas a estudantes de Matemática, mas de Ciências Naturais de um modo geral e a todos que apreciam a Matemática e que de alguma forma tenham o seu interesse voltado para este tema. Veremos...

Rio de Janeiro, Maio de 2021

Por favor, envie suas correções e/ou sugestões para:

victor.leon@unila.edu.br e bruno.scardua@gmail.com

ou então

V. León. ILACVN - CICN, Universidade Federal da Integração Latino-Americana,  
Parque tecnológico de Itaipú, Foz do Iguaçu-PR, 85867-970 - Brasil

B. Scárdua. Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
CP. 68530-Rio de Janeiro-RJ, 21945-970 - Brasil



# Conteúdo

---

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Prefácio</b>	<b>ii</b>
<b>I Equações diferenciais em espaços euclidianos e em superfícies</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução às EDOs</b>	<b>2</b>
1.1 O conceito de EDO . . . . .	2
1.2 O Problema de Cauchy e o Teorema de Picard . . . . .	9
1.3 O Teorema de Picard . . . . .	10
1.4 Complementos e Exercícios . . . . .	13
<b>2 Teoria qualitativa das EDOs lineares</b>	<b>19</b>
2.1 Normas em espaços de matrizes . . . . .	19
2.2 A exponencial de uma matriz . . . . .	20
2.3 A EDO linear, fluxos lineares . . . . .	22
2.4 Classificação, hiperbolicidade e estabilidade . . . . .	26
2.5 Exemplos de aplicações clássicas . . . . .	31
<b>3 Campos de vetores e EDOs</b>	<b>43</b>
3.1 EDOs autônomas e campos de vetores . . . . .	43
3.2 O teorema de Peano . . . . .	45

3.3	Soluções maximais . . . . .	47
3.4	O fluxo associado a um campo de vetores . . . . .	49
3.5	Diferenciabilidade do fluxo . . . . .	50
3.6	Folheação associada a um campo de vetores . . . . .	52
3.7	Conjugação de campos de vetores . . . . .	54
3.8	Estrutura local dos pontos regulares . . . . .	56
3.9	Singularidades hiperbólicas de campos de vetores . . . . .	58
3.10	Atratores e fontes locais . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Teoria qualitativa de EDOs autônomas</b>	<b>62</b>
4.1	Conjuntos limites . . . . .	67
4.2	O Teorema de Poincaré–Bendixson . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Estabilidade de Lyapunov</b>	<b>76</b>
5.1	Estabilidade de Lyapunov . . . . .	77
5.2	O critério de estabilidade de Lyapunov . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Teoria de Morse e Teorema de Reeb</b>	<b>97</b>
6.1	Exercícios do Capítulo . . . . .	98
6.2	Pontos críticos não degenerados: o Lema de Morse . . . . .	100
6.3	Superfícies regulares . . . . .	103
6.4	O teorema de retração de Morse . . . . .	106
6.5	O Teorema de Reeb esférico . . . . .	109
<b>7</b>	<b>O Teorema de Haefliger</b>	<b>113</b>
7.1	O Teorema de Haefliger . . . . .	114
7.2	Prova do Teorema de Haefliger . . . . .	115
7.3	Inexistência de campos analíticos . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Perturbação e o teorema de Peixoto</b>	<b>120</b>
8.1	Introdução à Teoria da Perturbação . . . . .	120
8.2	Estabilidade estrutural . . . . .	125
<b>II</b>	<b>Equações diferenciais em variedades diferenciáveis</b>	<b>130</b>
<b>9</b>	<b>Introdução às EDOs em Variedades</b>	<b>131</b>
9.1	Espaços topológicos e funções contínuas . . . . .	132
9.2	Superfícies no espaço euclidiano . . . . .	136

9.3	O conceito de variedade diferenciável . . . . .	139
9.4	Aplicações diferenciáveis . . . . .	144
9.5	O Fibrado tangente . . . . .	145
9.6	A derivada de uma aplicação diferenciável . . . . .	151
9.7	Imersões, submersões e o Teorema da Aplicação inversa . . . . .	154
9.8	Subvariedades . . . . .	155
9.9	Primeiro Teorema de Mergulho de Whitney . . . . .	157
9.10	Variedades orientáveis . . . . .	159
9.11	Transversalidade de aplicações e subvariedades . . . . .	162
9.12	Funções de Morse . . . . .	166
9.13	Espaços fibrados . . . . .	167
9.14	Grupos de Lie . . . . .	170
9.15	Espaços de recobrimento . . . . .	172
9.16	Ações propriamente descontínuas . . . . .	174
9.17	Funções auxiliares e Partições da unidade . . . . .	176
9.18	Campos de vetores em variedades . . . . .	180
9.19	Espaços de funções em variedades . . . . .	183
9.20	Teorema de Morse–Sard . . . . .	194
9.21	O Teorema de transversalidade . . . . .	199
9.22	Variedades como superfícies . . . . .	206
9.23	O Teorema de Tischler . . . . .	211
9.24	Exercícios do Capítulo . . . . .	213
<b>10</b>	<b>Classificação de superfícies</b>	<b>220</b>
10.1	Superfícies . . . . .	220
10.2	Singularidades de Morse em dimensão dois . . . . .	224
<b>11</b>	<b>Introdução à teoria das folheações</b>	<b>228</b>
11.1	A noção de folheação . . . . .	229
11.2	Holonomia . . . . .	233
11.3	Teoremas de Estabilidade de Reeb Simplificado . . . . .	238
<b>12</b>	<b>Equações diferenciais complexas</b>	<b>241</b>
12.1	Complexificação de um espaço vetorial . . . . .	241
12.2	Equações diferenciais complexas . . . . .	242
12.3	O Teorema de Briot–Bouquet . . . . .	247
12.4	Integral primeira e noção de germe . . . . .	249
12.5	O Blow-up na origem de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}^2$ . . . . .	252

12.6 O Blow-up de uma folheação em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ . . . . .	254
12.7 O Teorema de conjugação de Mattei–Moussu . . . . .	258
12.8 Aplicação: O teorema de Poincaré–Lyapunov . . . . .	259

**Bibliografia**

## **Parte I**

# **Equações diferenciais em espaços euclidianos e em superfícies**

## Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Geometria Lipschitz das singularidades** – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*
- Combinatória** – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*
- Códigos Geométricos** – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*
- Topologia e geometria de 3-variedades** – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*
- Ciência de Dados: Algoritmos e Aplicações** – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*
- Discovering Euclidean Phenomena in Poncet Families** – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*
- Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além** – *Victor León e Bruno Scárdua*
- Equações diferenciais e modelos epidemiológicos** – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*
- Differential Equation Models in Epidemiology** – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*
- A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes** – *Sinai Robins*
- PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria** – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*
- First steps into Model Order Reduction** – *Alessandro Alla*
- The Einstein Constraint Equations** – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*
- Dynamics of Circle Mappings** – *Edson de Faria e Pablo Guarino*
- Statistical model selection for stochastic systems** – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*
- Transfer Operators in Hyperbolic Dynamics** – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*
- A Course in Hodge Theory Periods of Algebraic Cycles** – *Hossein Movasati e Roberto Villafior Loyola*
- A dynamical system approach for Lane–Emden type problems** – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*
- Visualizing Thurston’s Geometries** – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*
- Scaling Problems, Algorithms and Applications to Computer Science and Statistics** – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*
- An Introduction to Characteristic Classes** – *Jean-Paul Brasselet*



Instituto de  
Matemática  
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-45-0



9 786589 124450