Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além

Víctor León
Bruno Scárdua

impa

33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além
Primeira impressão, julho de 2021

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-65-89124-45-0
MSC (2020) Primary: 57R70, Secondary: 37C27, 32S65, 37C75, 57R30, 37F75

Coordenação Geral Carolina Araujo

Produção Books in Bytes **Capa** Izabella Freitas & Jack Salvador

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ

www.impa.br
editora@impa.br

Apresentação

O objetivo deste livro é basicamente oferecer aos alunos de graduação de universidades brasileiras, um livro introdutório à teoria geométrica das equações diferenciais e dos sistemas dinâmicos. Com uma apresentação baseada nos resultados básicos da teoria das equações diferenciais ordinárias, focando nas autônomas, ou seja, aquelas dadas por campos de vetores. O caráter geométrico e suas relações com a topologia são abordados sempre que oportuno. Partindo de ambientes como subconjuntos abertos do espaço euclidiano, chegamos ao estudo dos temas propostos em ambientes mais gerais como superfícies regulares e, na segunda parte do texto, em variedades diferenciáveis. Tentamos adequar o texto à realidade das necessidades e possibilidades dos estudantes radicados no Brasil, sem sacrificar o nível final do texto e sua consequente utilidade. Este livro não foi concebido para ser usado como o livro-texto de um primeiro curso de equações diferenciais, que pensamos deva ser mais dedicado ao aprendizado dos conceitos básicos e métodos de resolução das mesmas. Este texto é pensado para ser, sim, um primeiro texto no estudo dos métodos geométricos em equações diferenciais, campos de vetores e sistemas dinâmicos. Na nossa visão, um texto dessa natureza deve incentivar e motivar muitos estudantes ao estudo de tais temas, iniciando assim uma possível carreira na pesquisa científica em ciências naturais. Também deve servir de literatura em língua portuguesa no Brasil para temas que em geral são tratados apenas em livros provenientes de outros países, cujo ensino possui, neste nível, características muito distintas, nem sempre facilitando o aprendizado de nossos estudantes. Enfim, resgatar a valorização dos métodos geométricos como esteio no aprendizado de conceitos e técnicas em matemática, mais especificamente em sistemas dinâmicos e equações diferenciais, é também um dos principais objetivos deste texto.

Prefácio

Um dos aspectos pouco estudados nos cursos de graduação é a interação entre geometria, topologia e dinâmica em um dado espaço, por exemplo, uma hipersuperfície no espaço euclidiano. Nos cursos de Matemática, o foco principal costuma ser em aspectos algébricos (cursos de Álgebra de Polinômios, Grupos e Álgebra Linear) e na resolução de problemas oriundos e por meio do Cálculo Diferencial e Integral. Isto inclui a abordagem dada às equações diferenciais ordinárias (EDO). Neste texto de nível introdutório (Graduação, Iniciação Científica, início de Mestrado) pretendemos motivar o estudo futuro de assuntos modernos em Dinâmica, Geometria e Topologia, por meio da introdução dos conceitos e resultados mais básicos acerca dessa interação entre ditas áreas. Tal curso deve servir de motivação para o estudo de várias vertentes modernas da Matemática, incluindo mas não limitadas a essas áreas: Sistemas Dinâmicos em Variedades, Dinâmica de Aplicações e Teoria Geométrica das Folheações. A escolha dos temas foi elaborada tendo-se em conta a necessidade de deixar alguns marcos claramente definidos, apresentar alguns dos resultados mais fundamentais que evidenciam a conexão entre elas e estimular o aluno a seguir adiante aprendendo.

Os pré-requisitos para este livro são mínimos, dentro da filosofia de um curso introdutório. O principal é um curso de Cálculo de um ano (dois semestres), cobrindo até um pouco de equações diferenciais ordinárias. Também é desejável um semestre de Física, para familiaridade com a linguagem de campos de vetores. Seria ótimo ter algumas noções de Análise Real, como a noção de função analítica, mas que podem vir dos cursos de Cálculo acima mencionados. Um pouco de Geometria (esferas, toros, superfícies) também pode ser aconselhável, embora não seja absolutamente imprescindível. Enfim, se possível alguns rudimentos de Topologia para a parte final. Contudo o mais importante é uma boa dose de interesse, perseverança e disposição para enfrentar desafios. Não podemos esquecer de curiosidade e interesse em aprender ciências.

Como já mencionamos acima, um dos objetivos deste curso é motivar o estudo futuro de assuntos modernos em Dinâmica, Geometria e Topologia, por meio da introdução dos conceitos e resultados mais básicos entre as áreas. Pretendemos também apresentar uma área, ou abordagem distinta do que se vê regularmente nos cursos de graduação em Matemática, Física etc, motivando uma linha de pensamento mais globalizada e com mais possibilidades de conexão entre as diversas disciplinas estudadas pelos alunos. Desta forma, uma eventual transição entre a graduação e os programas de pós-graduação (mestrado, doutorado) seria mais natural e menos potencialmente brusca. Esperamos também resgatar o interesse dos jovens estudantes dos cursos de graduação e início de mestrado, em áreas não tipificadas como centrais, mas que concentram, sim, grande parte da produção científica qualificada em Matemática realizada no Brasil.

Este livro foi escrito segundo nossa visão particular do que é relevante e imprescindível em um primeiro curso de Dinâmica e Geometria via equações diferenciais ordinárias. Desenvolvemos e utilizamos para isto, material eventualmente mais avançado do que aquele contido no programa dos cursos de Cálculo da graduação. Tentamos, na medida do possível, preservar a motivação e intuição físico-geométrica, que devem compor um bom texto sobre o tema.

No primeiro capítulo, apresentamos o conceito de equação diferencial ordinária, assim como os Problemas de Cauchy e Picard, e o Teorema de Picard sobre a existência e unicidade de soluções para o Problema de Cauchy. Iniciamos por exemplos clássicos de equações diferenciais ordinárias: a equação do pêndulo simples, o problema de desintegração do rádio e o teorema fundamental do cálculo. Os conceitos e resultados são, então, apresentados como resposta a questões gerais naturalmente sugeridas por esses exemplos. Nos capítulos seguintes, a teoria qualitativa e geométrica das EDOs e dos sistemas dinâmicos é apresentada e desenvolvida de forma suave e crescente. Iniciando em ambientes abertos do espaço euclidiano, seguimos pouco a pouco para o ambiente mais abstrato das superfícies e finalmente para as variedades diferenciáveis.

O modo como este texto foi escrito está baseado em nossa experiência em cursos de graduação e pós-graduação em universidades federais brasileiras. Um dos maiores desafios, e também motivação, foi a ausência de textos escritos originalmente em língua portuguesa em nosso país.

Esperamos ter alcançado parcialmente o objetivo inicial e que o livro possa ser útil não apenas a estudantes de Matemática, mas de Ciências Naturais de um modo geral e a todos que apreciam a Matemática e que de alguma forma tenham o seu interesse voltado para este tema. Veremos...

Rio de Janeiro, Maio de 2021

Por favor, envie suas correções e/ou sugestões para:
victor.leon@unila.edu.br e bruno.scardua@gmail.com

ou então

V. León. ILACVN - CICN, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Parque tecnológico de Itaipú, Foz do Iguaçu-PR, 85867-970 - Brasil

B. Scárdua. Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro, CP. 68530-Rio de Janeiro-RJ, 21945-970 - Brasil

Conteúdo

Parte I

Equações diferenciais em espaços euclidianos e em superfícies

Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Geometria Lipschitz das singularidades – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*

Combinatória – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*

Códigos Geométricos – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*

Topologia e geometria de 3-variedades – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*

Ciência de Dados: Algoritmos e Aplicações – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*

Discovering Euclidean Phenomena in Poncelet Families – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além – *Víctor León e Bruno Scárdua*

Equações diferenciais e modelos epidemiológicos – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

Differential Equation Models in Epidemiology – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes – *Sinai Robins*

PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*

First steps into Model Order Reduction – *Alessandro Alla*

The Einstein Constraint Equations – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*

Dynamics of Circle Mappings – *Edson de Faria e Pablo Guarino*

Statistical model selection for stochastic systems – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*

Transfer Operators in Hyperbolic Dynamics – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*

A Course in Hodge Theory Periods of Algebraic Cycles – *Hossein Movasati e Roberto Villaflor Loyola*

A dynamical system approach for Lane–Emden type problems – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*

Visualizing Thurston's Geometries – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*

Scaling Problems, Algorithms and Applications to Computer Science and Statistics – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*

An Introduction to Characteristic Classes – *Jean-Paul Brasselet* impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-45-0

9 786589 124450