PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria

Rafael Bezerra dos Santos
Ana Cristina Vieira

impa

33º Colóquio Brasileiro de Matemática

PI-álgebras:
uma introdução à PI-teoria

PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria
Primeira impressão, julho de 2021

ISBN 978-65-89124-37-5
MSC (2020) Primary: 16R10, Secondary: 16P90, 20C30, 16D60, 16S50, 15A75

Coordenação Geral Carolina Araujo

Produção Books in Bytes **Capa** Izabella Freitas & Jack Salvador

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ

`www.impa.br`
`editora@impa.br`

Sumário

Prefácio

Este livro é dedicado à introdução à teoria de álgebras com identidades polinomiais, conhecida como PI-teoria. Para isso, essencialmente consideraremos álgebras associativas sobre um corpo F de característica zero. Polinômios em variáveis não comutativas, se anulando sob avaliação de elementos em uma álgebra, são definidos como identidades polinomiais e foram considerados inicialmente nos trabalhos de Dehn (1922) e Wagner (1937).

Uma álgebra satisfazendo uma identidade polinomial não nula é denominada uma PI-álgebra. Qualquer álgebra comutativa é uma PI-álgebra, e um exemplo de uma PI-álgebra não comutativa é a álgebra UT_2, de matrizes triangulares superiores 2×2 sobre um corpo F. Em geral, álgebras de dimensão finita são exemplos de PI-álgebras, satisfazendo um polinômio especial, chamado polinômio standard[1]. Por outro lado, um excelente exemplo de uma PI-álgebra de dimensão infinita é a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$, ou álgebra exterior.

O desenvolvimento da PI-teoria teve início basicamente a partir do artigo de Kaplansky (1948), dedicado à descrição da estrutura de uma PI-álgebra primitiva. Dois anos após a publicação do Teorema de Kaplansky, Amitsur e Levitzki (1950) provaram que o polinômio standard de grau $2k$ é uma identidade de grau mínimo da álgebra de matrizes $M_k(F)$. Para provar o resultado, os autores usaram métodos puramente combinatoriais, introduzindo um novo tipo de abordagem na PI-teoria, cujo objetivo passou a ser a descrição das identidades satisfeitas por uma álgebra. Com isso, o interesse se tornou em determinar o conjunto $\mathrm{Id}(A)$ de todas as identidades polinomiais de uma dada álgebra A.

[1] Faremos a opção de não traduzir a palavra standard para o português.

O conjunto $\mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, a álgebra de polinômios em um conjunto enumerável X de variáveis não comutativas sobre F, isto é, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$, e é chamado o T-ideal de A. Specht (1950) conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, o T-ideal de uma álgebra associativa é finitamente gerado como um T-ideal.

A conjectura de Specht foi provada para alguns casos particulares nos anos seguintes, e a demonstração completa foi dada por Kemer (1978). Além disso, o T-ideal $\mathrm{Id}(A)$ é gerado por polinômios multilineares, ou seja, por polinômios cujas variáveis aparecem uma única vez em cada um de seus monômios. Mas mesmo diante dessas informações, é importante destacar que a descrição do T-ideal de uma álgebra é, em geral, um problema difícil. De fato, exemplificamos que, mesmo para a álgebra de matrizes $M_k(F)$, o T-ideal foi descrito somente para $k = 1$ e $k = 2$, até o presente momento. Na tentativa de minimizar a dificuldade encontrada na determinação do T-ideal de uma álgebra A, alguns invariantes numéricos associados à A foram introduzidos, para conhecer informações quantitativas sobre $\mathrm{Id}(A)$. Um invariante numérico muito útil é a chamada sequência de codimensões de uma álgebra A. Tal sequência, denotada $\{c_n(A)\}_{n\geqslant 1}$, foi introduzida por Regev (1972) e mede, de uma certa maneira, a taxa de crescimento das identidades polinomiais satisfeitas por A.

É bem compreendido que se A é uma PI-álgebra, então a sequência de codimensões cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente, isto é, existem constantes $a, k \geqslant 0$ tais que $c_n(A) \leqslant an^k$ para todo $n \geqslant 1$. Nesse último caso, dizemos que A tem crescimento polinomial.

A sequência de codimensões, além de ser uma importante ferramenta, tornou-se um dos principais objetos de investigação na PI-teoria e, nos últimos anos, tem sido estudada por diversos autores. A possibilidade de álgebras distintas possuírem o mesmo T-ideal nos leva a estudar a classe das álgebras que satisfaça todas as identidades de uma dada álgebra A, chamada de variedade gerada por A e denotada por $\mathrm{var}(A)$. Para uma variedade de álgebras $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$. Um dos principais objetivos da PI-teoria tem sido caracterizar e classificar variedades de álgebras $\mathcal{V}$ por meio do comportamento assintótico da sequência $c_n(\mathcal{V})$. Em particular, nesse livro, temos interesse em variedades com crescimento polinomial da sequência de codimensões, isto é, variedades geradas por álgebras de crescimento polinomial.

O estudo das variedades de crescimento polinomial foi iniciado por Kemer (1979). Mais especificamente, ele mostrou que $\mathrm{var}(A)$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathcal{G}$ e $UT_2(F) \notin \mathrm{var}(A)$. Como consequência dessa caracterização, segue que $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e $\mathrm{var}(UT_2(F))$ são as únicas variedades de crescimento quase polinomial, isto é, as sequências de codimensões de $\mathcal{G}$ e de $UT_2(F)$ crescem exponencialmente, mas qualquer subvariedade própria de var($\mathcal{G}$) e de var($UT_2(F)$) tem crescimento polinomial.

Este livro foi escrito com o objetivo de motivar estudantes interessados na área de álgebra a conhecer resultados clássicos e também recentes da PI-teoria, necessários para apresentar uma demonstração moderna do Teorema de Kemer e fornecer outras caracterizações de variedades de álgebras de crescimento polinomial.

Ao escrever o livro, nossa preocupação foi deixar um bom registro dos principais resultados em álgebra não comutativa, importantes ferramentas no desenvolvimento da PI-teoria. Fizemos a opção de detalhar o conteúdo de tais tópicos, não apenas para servir de apoio aos estudantes interessados no estudo de PI-álgebras, mas também para que os colegas possam utilizar o primeiro capítulo do livro em seus cursos básicos de teoria de anéis e módulos.

Dessa forma, no Capítulo 1, apresentamos as noções de anéis e módulos, seguidos de diversos resultados importantes sobre esses objetos. Introduzimos o conceito de produto tensorial de módulos e provamos o Teorema de Wedderburn–Artin, que caracteriza os anéis artinianos semissimples. Provamos também o Teorema de Wedderburn, que apresenta a estrutura de anéis semissimples. Definimos o radical de Jacobson de um anel e provamos suas propriedades. Por fim, dedicamos a última seção ao estudo das álgebras, objeto principal de estudo deste livro, e provamos o Teorema de Wedderburn–Malcev. Este capítulo pode ser dispensado por estudantes que tenham conhecimento básico dos resultados citados.

No Capítulo 2, nos preocupamos em explicitar os resultados essenciais a respeito de representações e caracteres de um grupo finito, tendo como foco o grupo simétrico S_n. Esse grupo tem participação especial no estudo do crescimento da sequência de codimensões de uma PI-álgebra, devido à sua ação sobre o espaço dos polinômios multilineares de grau n. Destacamos os resultados essenciais da teoria desenvolvida por A. Young para o estudo dos caracteres irredutíveis de S_n.

O Capítulo 3 tem como foco a introdução aos objetos principais deste livro, os polinômios na álgebra livre $F\langle X\rangle$ e as PI-álgebras. Provamos propriedades importantes sobre os geradores do T-ideal de uma PI-álgebra e demonstramos o processo de multilinearização, que permite obter uma identidade multilinear a partir de uma identidade qualquer de uma álgebra. Na seção final, demonstraremos o célebre Teorema de Amitsur–Levitzki.

No Capítulo 4, definimos as variedades de álgebras, apresentamos resultados destacados a respeito e damos exemplos de álgebras PI-equivalentes, isto é, que geram a mesma variedade. Definimos, ainda, a sequência de codimensões de uma álgebra e o significado de crescimento polinomial e exponencial. Damos exemplos de álgebras de crescimento polinomial e calculamos a sequência de codimensões das álgebras $\mathcal{G}$ e UT_2, mostrando que estas têm crescimento exponencial. Introduzimos, também, os conceitos de superálgebra e de PI-expoente.

Iniciamos o Capítulo 5 estabelecendo um resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para que uma variedade seja gerada por uma álgebra de dimensão finita e provamos o célebre Teorema de Kemer, que caracteriza variedades de crescimento polinomial das codimensões via exclusão de $\mathcal{G}$ e UT_2 da variedade. Além disso, introduzimos a sequência de cocaracteres $\{\chi_n(A)\}_{n\geqslant 1}$ de uma álgebra e demonstramos o resultado que caracteriza as variedades de crescimento polinomial por meio da decomposição de $\chi_n(A)$. Ao final, apresentamos mais um resultado de caracterização, provando que uma álgebra A tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathrm{var}(A) = \mathrm{var}(B)$, onde B é uma álgebra de dimensão finita, que tem uma decomposição explícita como soma direta de subálgebras com propriedades particulares.

O Capítulo 6 foi preparado com a intenção de atrair os interessados na área de álgebra a se aprofundar em resultados de pesquisa recentemente desenvolvidos na PI-teoria. Este capítulo não contém as demonstrações dos resultados apresentados, pois o objetivo é motivar o leitor a estudar os artigos onde foram publicados. Nele, destacamos a importância das variedades minimais de crescimento polinomial e introduzimos as φ-álgebras, que são as álgebras com estrutura adicional. Apresentamos a extensão das noções de identidades e codimensões para φ-álgebras, os teoremas de caracterização de φ-variedades de crescimento polinomial e resultados de classificação em diversos aspectos. Ao final, consideramos as superálgebras com involução graduada, objeto recente de estudo na PI-teoria, e apresentamos o teorema de caracterização de variedades de crescimento polinomial correspondente, junto com resultados de classificação já provados.

Convém ressaltar que, no decorrer dos capítulos, foram inseridos diversos exercícios interessantes com importantes informações sobre o assunto em desenvolvimento no texto. Também, ao fim da cada uma das seções dos Capítulos 1 a 5, sugerimos uma lista de sentenças afirmativas sobre o conteúdo descrito, para que os leitores possam decidir se são verdadeiras ou falsas, o que chamamos Exercícios V ou F da seção correspondente.

A redação deste livro é uma importante contribuição para a motivação de novos estudiosos em PI-teoria no Brasil, pela escassez de literatura em português sobre o assunto. Os primeiros livros dedicados à PI-teoria foram publicados nos anos 1970 e 1980, como, por exemplo, os livros de Procesi (1973), Jacobson (1975) e Rowen (1980). A prova da conjectura de Specht pode ser consultada na importante monografia de Kemer (1991). Diversos livros dedicam algumas seções ao tratamento de álgebras com identidades polinomiais tais como os de Herstein (1968), Passman (1977), Rowen (1991) e Formanek (1991). Aos leitores interessados em se aprofundar de modo mais geral na PI-teoria, indicamos as literaturas mais atualizadas de Drensky (2000), Giambruno e Zaicev (2005) e Aljadeff et al. (2020). Por fim, um interessante material com resultados recentes de pesquisa em PI-teoria é o livro editado por Di Vincenzo e Giambruno (2021), que pode ser consultado pelo leitor interessado na área.

Queremos deixar registrado aqui, nossos agradecimentos àqueles que contribuíram para uma melhor qualidade deste livro. Aos nossos orientandos Maralice Assis e Wesley Quaresma, e a Dafne Bessades e a Maria Luiza Santos, doutoras recentemente formadas em PI-teoria sob nossa orientação, pela revisão dos termos matemáticos e pela sugestão de exercícios para as seções. Aos nossos estudantes que colaboraram com discussões durante os seminários sobre os assuntos deste livro. Aos colegas: Thiago Castilho de Mello e Luís Felipe Gonçalves Fonseca, pelas sugestões e empréstimo de material para a elaboração deste texto. Por fim, agradecemos à organização do 33^0 Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade de divulgar a PI-teoria e pelo apoio constante de edição durante a elaboração do texto.

Belo Horizonte, Maio de 2021

Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira

1 Álgebras associativas

Este capítulo inicial contém os resultados que julgamos importantes para uma boa compreensão de todos os demais. Na Seção 1.1, fazemos uma pequena revisão sobre teoria de anéis, fixando a notação que será utilizada em todo o livro. Na Seção 1.2, estudamos o conceito de módulos e provamos suas principais propriedades. Finalizamos a seção definindo o produto tensorial, com a finalidade de estudar a extensão de escalares de um espaço vetorial. A Seção 1.3 é uma seção central do capítulo, onde estudamos a semissimplicidade de anéis e módulos. Definimos a noção de anéis e módulos artinianos e noetherianos e provamos o Teorema de Wedderburn–Artin, que caracteriza os anéis artinianos semissimples. É nesta seção que definimos o radical de Jacobson de um anel, um ideal em destaque na teoria de anéis. Por fim, na Seção 1.4, introduzimos o conceito de álgebras sobre um corpo, o principal objeto de estudo deste livro, e construímos a seção com o objetivo de demonstrar um dos principais teoremas utilizados neste livro: o Teorema de Wedderburn–Malcev.

Este capítulo contém resultados clássicos em álgebra não comutativa, podendo ser dispensado pelo leitor mais avançado. No final do capítulo, faremos um resumo com os principais resultados sobre álgebras utilizados nos capítulos seguintes.

1.1 Anéis

Esta seção é introdutória e pode ser dispensada aos leitores que já tem conhecimento básico sobre teoria de anéis. Aqui, faremos uma breve revisão dos resultados necessários para o desenvolvimento deste livro.

Definição 1.1.1. Um anel R é um conjunto não vazio munido de duas operações binárias, $+ : R \times R \to R$ e $\cdot : R \times R \to R$, que chamaremos de adição e multiplicação, respectivamente, tais que para todos $a, b, c \in R$, as seguintes propriedades são válidas:

1. $a + b = b + a$;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. Existe um elemento neutro aditivo $0 \in R$ tal que $a + 0 = a$;
4. Existe um inverso aditivo $-a \in R$ tal que $a + (-a) = 0$;
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
7. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

As propriedades 1, 2, 3 e 4 dizem que o conjunto R munido da operação $+$ é um grupo abeliano[1], e escreveremos $(R, +)$. A partir de agora, iremos omitir o ponto no produto de dois elementos de um anel R e escreveremos $a \cdot b = ab$.

Neste livro, não exigimos a comutatividade da multiplicação em um anel. Por isso, definiremos esse fato isoladamente.

Dizemos que um anel R é comutativo se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in R$. Um anel R é um domínio, se $ab = 0$ implica que ou $a = 0$ ou $b = 0$. Elementos não nulos $a, b \in R$ tais que $ab = 0$ são chamados de divisores de zero. Assim, um domínio é um anel sem divisores de zero.

Definição 1.1.2. Um anel R contendo um elemento $1 \neq 0$ tal que

$$1a = a1 = a, \quad \text{para todo } a \in R$$

é chamado de anel com unidade. Um domínio comutativo com unidade é chamado de domínio de integridade.

[1] O leitor interessado deve ver no Capítulo 2 uma definição geral de grupo.

Definição 1.1.3. Um elemento a em um anel com unidade R é dito ser invertível, se existe um elemento, que denotaremos por $a^{-1} \in R$ e chamado de inverso de a, tal que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Em um anel com unidade, consideramos o conjunto

$$\mathcal{U}(R) = \{a \in R : a \text{ é invertível}\}$$

chamado de grupo das unidades de R. Um anel com unidade tal que todos os elementos diferentes de 0 são invertíveis, isto é, $\mathcal{U}(R) = R - \{0\}$, é chamado de anel de divisão. Um anel de divisão comutativo é chamado de corpo.

Como exemplos básicos de domínios de integridade, temos os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ dos números inteiros, racionais, reais e complexos, respectivamente, com operações de adição e multiplicação usuais.

Recordemos que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$. Logo, $\mathbb{Z}$ não é um corpo, enquanto $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são exemplos de corpos.

Exemplo 1.1.4. O anel $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ da classe dos restos módulo m é um anel comutativo com unidade que é um corpo se, e somente se, m é primo.

Percebemos, então, que temos exemplos de corpos infinitos e de corpos finitos. Neste livro, conforme veremos, temos um interesse maior por resultados sobre corpos infinitos.

Exemplo 1.1.5. O conjunto $M_n(R)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em um anel R, com as operações de adição e multiplicação usuais, é um anel.

Em geral, o anel $M_n(R)$ não é um anel comutativo. Além disso, se R possui unidade, então $M_n(R)$ também possui unidade. Neste caso, denotamos por

$$1 = I_n = (a_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e I_n é chamada de matriz identidade $n \times n$.

Se R é um anel com unidade, denotamos por e_{ij} a matriz que possui o elemento 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais.

As matrizes e_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, são chamadas de matrizes elementares. Note que $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{ii}$ e que $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, onde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Geometria Lipschitz das singularidades – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*

Combinatória – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*

Códigos Geométricos – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*

Topologia e geometria de 3-variedades – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*

Ciência de Dados: Algoritmos e Aplicações – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*

Discovering Euclidean Phenomena in Poncelet Families – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além – *Víctor León e Bruno Scárdua*

Equações diferenciais e modelos epidemiológicos – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

Differential Equation Models in Epidemiology – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes – *Sinai Robins*

PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*

First steps into Model Order Reduction – *Alessandro Alla*

The Einstein Constraint Equations – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*

Dynamics of Circle Mappings – *Edson de Faria e Pablo Guarino*

Statistical model selection for stochastic systems – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*

Transfer Operators in Hyperbolic Dynamics – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*

A Course in Hodge Theory Periods of Algebraic Cycles – *Hossein Movasati e Roberto Villaflor Loyola*

A dynamical system approach for Lane–Emden type problems – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*

Visualizing Thurston's Geometries – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*

Scaling Problems, Algorithms and Applications to Computer Science and Statistics – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*

An Introduction to Characteristic Classes – *Jean-Paul Brasselet* impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-37-5

9 786589 124375